1. Zbadać czy istnieją granice

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}$, (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x^2$, (d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, (e) $\lim\limits_{x\to 4}[\sqrt{x}]$ ([x]=część całkowita liczby x), (f) $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x^3}}$, (g) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{|x-2|}$, (h) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$.

2. Obliczyć granice.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x+1}{3^x+2}$, (b) $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$, (e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ (f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x-\frac{1}{\cos x})$, (g) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$, (h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.

3. Korzystając z twierdzenia o 3 funkcjach obliczyć granice

(a) $\lim\limits_{x\to 0}x^3\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\sin x}{x^2}$, (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x+\sin^2 x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cos\frac{1}{x^2}$, (e) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x(2+\cos x)$.

4. Obliczyć granice

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x+2})^{2x-1}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}$, (e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}\frac{2}{x}}$.

5. Zbadać ciągłość funkcji.

(a) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-x^2}{|x-1|} & \text{dla } x\neq 1\\ 1 & \text{dla } x=1\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^4-1}{|x|-1} & \text{dla } |x|\neq 1\\ 4 & \text{dla } |x|=1\end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|+x}{x^2} & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{dla } x\in(0,1)\cup(1,\infty)\\ 3 & \text{dla } x=1\end{cases}$

6. Dobrać parametry $a,b\in\mathbf{R}$ tak, aby funkcje były ciągłe.

$f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{dla } |x|\geqslant\frac{\pi}{2}\\ ax+b & \text{dla } |x|<\frac{\pi}{2}\end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \\ a^x + b & \text{dla} \quad 0 < x < 1 \\ 3 & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad |x| \leqslant 1 \\ x^2 + ax + b & \text{dla} \quad |x| > 1 \end{cases}$

7. Wykazać, że równanie ma pierwiastek w przedziale (0,1) i obliczyć ten pierwiastek z dokładnością do 0,1.

(a) $x^3 + 6x - 2 = 0$,

(b) $3^x + x = 3$,

(c) $x2^x = 1$

Odpowiedzi na następnej stronie.

1. (a) nie, (b) nie , (c) nie, (d) nie, obliczyć jednostronne, (e) nie, (f) nie, (g) nie, (h) tak.

2. (a) 0, (b) 0, (c) 1/2, (d) 1/4, (e) 2, (f) 0, (g) 0, (h) 1.

3. (a) 0, (b) 0, (c) 0, (d) 0, (e) ∞.

4. (a) 9, (b) e^2, (c) 3/2, (d) 0, (e) 1/2.

5. (a) nieciągła w 1, nieciągłość I rodzaju, (b) nieciągła w -1, II rodzaju, (c) nieciągła w 0, II rodzaju, (d) nieciągła w 1, I rodzaju.

6. (a) $a = 0, b = \frac{2}{\pi}$, (b) $a = 2, b = 1$, (c) $a = 1, b = -1$.

7. (a) $f(0) = -2, f(1) = 5$ więc jest pierwistek. $f(1/2) > 0$, $f(1/4) < 0$, $f(3/8) > 0$ jest więc pierwistek w przedziale $(1/4, 3/8)$. Biorąc x_0 jako środek tego przedziału mamy $x_0 = 5/16$, błąd nie przekracza 1/16.

(b) Rozpatrzeć funkcję $3^x + x - 3$, (c) Rozpatrzeć funkcję $x2^x - 1$.